

Le théorème (classique) des accroissements finis : old and new

The (classical) mean value theorem : du neuf avec du vieux

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY
Institut de Mathématiques
Université PAUL SABATIER de Toulouse
jbhu@math.univ-toulouse.fr
<https://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/>

Résumé. Ledit théorème des accroissements finis (“le TAF” comme l’écrivent parfois les étudiants) ou, autre appellation, le théorème de la valeur moyenne (TVM) est l’un de mes résultats favoris en Analyse réelle. A une époque, tout mathématicien analyste, même parmi les plus grands, allait de son résultat sur le TAF. J’ai moi-même beaucoup écrit sur le sujet et continue à m’y intéresser. Ce que nous considérons dans cet exposé est le TAF classique, celui pour les fonctions différentiables (à valeurs réelles ou vectorielles), sans entrer dans le monde des TAF pour les fonctions non différentiables dans lequel il nous est arrivé de nous promener également.

Les périodes récentes des confinements forcés, plus le fait qu’on pouvait accéder temporairement à des bases de données d’articles mathématiques parfois anciens, m’ont donné l’occasion de revisiter des dizaines, que dis-je des centaines, de références sur le sujet. On y a découvert quelques pépites, un peu oubliées.

Ma présentation sera sous forme de questions-réponses, un quiz en quelque sorte. S’y ajouteront quelques commentaires sur le calcul différentiel et son enseignement, ainsi que sur des affirmations un peu trop péremptives de mathématiciens (ex. J. DIEUDONNÉ) sur ce qui est possible ou important dans un TAF.

Abstract. The so-called Mean Value Theorem (MVT) or, by another name, the Finite Increment Theorem, is one of my favorite results in Real Analysis. In the older times, any mathematician working in Analysis, even among the greatest, went for his result on the MVT. I myself have written extensively on the subject and continue to be interested in it. What we are considering in this presentation is the classical MVT, the one for differentiable functions (real-valued or vector-valued), without entering the world of MVTs for non-differentiable functions in which we have also happened to wander.

The recent periods of lockdowns, plus the fact that we could temporarily have access to databases of sometimes old mathematical articles, gave me the

opportunity to revisit dozens, actually hundreds, of references on the subject. We discovered some gems, somehow forgotten.

My presentation will be in the form of questions-answers, a kind of quiz. There will be added a few comments on differential calculus and its teaching, as well as on statements that are a little too peremptory by mathematicians (e. g. J. DIEUDONNÉ) on what is possible or important in a MVT.